Teoria da Divulgação e Teoria dos Jogos: uma introdução

RESUMO

O objetivo deste trabalho é explicar, de maneira simples e didática, e difundir a aplicação da teoria dos jogos em Contabilidade. Abordamos de um modo elementar alguns tópicos de teoria dos jogos e examinamos, numa analogia com um jogo estratégico, como a não divulgação voluntária da identidade da empresa pode ser conectada pela teoria dos jogos ao valor de mercado do seu ativo. Um modelo Bayesiano simplificado sugere que o valor do ativo se tornaria instável e poderia variar abaixo do máximo valor possível determinado pela visibilidade da identidade da empresa no mercado. No caso de incerteza máxima da identidade da empresa, o valor de seu ativo poderia sofrer uma severa redução e piorar ainda mais, aparentemente de modo paradoxal, em situações de incerteza menor. O enfoque positivo na pesquisa contábil apareceu na década de 1960, teve um importante impulso em 1978 (WATTS e ZIMMERMAN 1978, 1979), consolidou-se em WATTS e ZIMMERMAN (1986) e ganhou grande impulso a partir de 1995 (OHLSON 1995). Este método elabora modelos analíticos que procuram explicar e prever os fenômenos relacionados às práticas contábeis fazendo uso irrestrito e intenso de matemática e estatística. Dentre esses, destaca-se a divulgação voluntária de informações contábeis e o seu efeito comercial e econômico. Os modelos matemáticos e estatísticos, que descrevem esses fenômenos, nunca são exatos ou perfeitos, mas sugerem padrões nas conseqüências da divulgação voluntária (ou da não–divulgação) antes invisíveis, ou incertos, ao contador-administrador e, portanto, permitem previsões e explicações sobre a prática contábil.

1. INTRODUÇÃO

Dentre as teorias matemáticas utilizadas, aquelas que nos interessam aqui são as teorias de jogos estratégicos. Essas teorias têm sido bem sucedidas em inúmeros campos do conhecimento científico. Alguns exemplos notáveis são suas aplicações à Economia reconhecidas por meio da atribuição do Prêmio Nobel.

A idéia de analisar a Economia por meio de jogos estratégicos remonta a COURNOT (1838) e BERTRAND (1883) e EDGEWORTH (1897) estudando a produção e os preços de oligopólios. Esses estudos foram considerados apenas modelos especiais e não mudaram a maneira como os economistas analisavam a Economia, ao contrário dos estudos de von Neumann e Morgenstern que comentaremos abaixo.

As aplicações das teorias de jogos ao conhecimento científico e a qualquer tipo de análise lógica de sistemas envolvendo competidores deverão expandir-se cada vez mais. Uma evidência dessa expansão é justamente o estudo das conseqüências da divulgação voluntária mencionada acima.

Quando um modelo matemático é desenvolvido, e suas previsões são calculadas, outras partes da Matemática como, por exemplo, a Análise Real, são requisitadas ressaltando ainda mais a utilidade da Matemática.

O objetivo desse trabalho é explicar e difundir a compreensão desse processo e contribuir para tornar mais acessível a contadores e administradores a aplicação da Matemática à análise da relação comercial e econômica da empresa com o mundo dos negócios competitivos. Utilizamos, como modelos, jogos com jogadores A e B, que simulam uma empresa A e sua concorrente a empresa B, e que adotam estratégias s_A, s_B, respectivamente, análogas às tomadas de decisão desses agentes econômicos.

2. UM POUCO DE HISTÓRIA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Dois cientistas que trabalharam em Princeton, EUA, durante várias décadas do Século XX, propuseram em seu famoso livro de 1944 que a maioria dos problemas de Economia deveriam ser analisados como jogos de estratégia. Inventaram uma recompensa "u" para representar os ganhos e perdas pelas tomadas de decisões. A representação de ganhos e perdas associados às tomadas de decisão é a função utilidade ("Payoff" ou "utility function" em Inglês. O termo "utility" tem outros significados em Economia) inventada pelo matemático húngaro John von Neumann (1903–1957, o seu nome original era Johann Von Neumann) e seu colega o economista Oskar Morgenstern. Viveu quase toda sua vida nos EUA e fez importantes contribuições em Física Quântica, Lógica, Meteorologia, Ciência da Computação, concebeu a arquitetura do computador digital, e sua Teoria dos Jogos, juntamente com Oskar Morgenstern, teve grande influência na Economia. Escreveu importantes obras matemáticas como *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, de 1932. Foram inúmeras as obras importantes de von Neumann. Morgenstern, economista alemão (1902–1977), escreveu, juntamente com von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), aplicando a Teoria dos Jogos de Estratégia de von Neumann (1928) aos negócios competitivos. Outros livros de Morgenstern são *On the Accuracy of Economic Observations* (1950), *Prolegomena to a Theory of Organization* (1951) e, com C. W. J. Granger, *Predictability of Stock Market Price*s (1970).

Um jogo de estratégia com dois jogadores A e B é um conjunto de pares ordenados $G = \{(S_A, u_A), (S_B, u_B)\}$ satisfazendo algumas propriedades que explicaremos em seguida. O significado dessa notação matemática é o seguinte: o jogo tem um nome "G" (de "game") e contém pares ordenados, isto é, conjuntos (S_A, u_A), (S_B, u_B) com dois elementos em ordem e especificados como conjunto de estratégias S_A e recompensa u_A do jogador A.

O conjunto não ordenado $I = \{1, 2\}$ (portanto, $\{1, 2\} \neq (1, 2)$, isto é, os parênteses são usados quando a ordem deve ser considerada) é o conjunto de jogadores sem especificação de qual é o primeiro elemento e qual é o segundo e, portanto, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Escrevemos $i \in I = \{1, 2\}$ para indicar que o jogador i pode ser o jogador 1 ou o jogador 2. Podemos também indicar o conjunto de jogadores por $I = \{A, B\}$. Nesse caso, os conjuntos não ordenados de estratégias puras dos dois jogadores são S_A e S_B. Dizemos que A e B escolhem estratégias $s_A \in S_A$ e $s_B \in S_B$.

O conjunto S de estratégias conjuntas é o produto cartesiano: $S = S_A \times S_B$ e as funções utilidade, que recompensam as escolhas de estratégias $s_A \in S_A$ e $s_B \in S_B$, são: $u_A : S_A \times S_B \to \mathbb{R}$ e $u_B : S_A \times S_B \to \mathbb{R}$. Observemos que o produto cartesiano "$\times$" de conjuntos organiza os conjuntos e estratégias S_A, S_B de modo respectivo aos jogadores ordenados no par ordenado (A, B). Assim, podemos escrever: $s \in S \Leftrightarrow s = (s_A, s_B)$ que se lê: "s é uma estratégia conjunta se, e somente se, s é um conjunto ordenado de estratégias de cada jogador".

Vejamos mais de perto o que é a recompensa $\boldsymbol{u}$ a ser atribuída a um jogador. Usando a Matemática, podemos representar a recompensa do jogador A por seus movimentos estratégicos por meio do conceito de função real, isto é, uma função que toma valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e tem por domínio o conjunto S de estratégias conjuntas: $u_A : S \to \mathbb{R}$. A recompensa de A pela estratégia conjunta $s = (s_A, s_B)$ é o número real $u_A(s) \in \mathbb{R}$.

A recompensa de B pela estratégia conjunta $s = (s_A, s_B)$ é o número real $u_B(s) \in \mathbb{R}$. É importante notar que uma estratégia conjunta é sempre um par de estratégias sendo a primeira estratégia s_A do par uma estratégia escolhida por A e a segunda estratégia s_B do par uma estratégia escolhida por B. Além disso, cada estratégia conjunta $s = (s_A, s_B)$ é recompensada pela função utilidade de von Neumann–Morgenstern.

Uma vez esclarecida essa importante noção, podemos agora focalizar a noção de jogo de soma constante.

Um jogo com dois jogadores é um jogo de soma zero se $u_A(s) + u_B(s) = 0$, para todo par $s = (s_A, s_B)$, quaisquer que sejam as estratégias s_A e s_B escolhidas por A e B, respectivamente.

Em outras palavras, em um jogo de soma zero vale a igualdade $u_A(s) = -u_B(s)$ para todo par $s = (s_A, s_B)$, quaisquer que sejam as estratégias s_A e s_B escolhidas por A e B, e, por causa disso, dizemos que a recompensa $-R$ atribuída a um jogador é exatamente o oposto da recompensa R atribuída ao outro jogador.

Desde David Ricardo (economista inglês (1772–1823), um dos primeiros a sistematizar a Teoria Econômica nascente no século XIX, a crença no “laissez-faire” era comum. Seus defensores argumentavam que a economia real se fundamentava em uma ordem natural e que, portanto, as atividades individuais deveriam ser não–regulamentadas. John Stuart Mill popularizou essa filosofia em seu *Principles of Political Economy* (1848). Segundo ela, o indivíduo deixado à mercê de seu objetivo particular levaria a sociedade a atingir o melhor resultado possível. O Estado deveria se limitar a manter a ordem e a segurança e evitar interferir na iniciativa do indivíduo em buscar a satisfação de seus próprios desejos e Adam Smith (filósofo e economista político escocês (1723–1790)), escreveu *An Inquiry into the nature and causes of the Wealth of Nations* (1776), o primeiro tratado de economia política, que também pode ser considerado uma exposição parcial de um grande esquema da evolução histórica. A “mão invisível” opera no estágio comercial da sociedade. Um sistema de liberdade perfeita, que opera sob direção e restrições humanas, e sob instituições inteligentemente constituídas, dá origem a uma sociedade ordenada. Os conceitos de “laissez faire” e “mão invisível do mercado” vinham ocupando uma posição central na análise e compreensão da Economia (abstração da economia real). Com von Neumann e Morgenstern a Economia (portanto, não a economia real) foi vista como jogo de soma zero, isto é, o que alguns ganham é, exatamente, o mesmo que outros perdem.

Um jogo com dois jogadores é um jogo de soma positiva se $u_A(s) + u_B(s) > 0$, e é um jogo de soma negativa se $u_A(s) + u_B(s) < 0$, para todo par $s = (s_A, s_B)$, quaisquer que sejam as estratégias s_A e s_B escolhidas por A e B, respectivamente.

Um jogo de soma constante é um jogo onde a soma $u_A(s) + u_B(s)$ das recompensas é constante, isto é, $u_A(s) + u_B(s) = c$, para todo par $s = (s_A, s_B)$, quaisquer que sejam as estratégias s_A e s_B escolhidas por A e B, respectivamente. O valor c não muda durante todo o tempo de duração do jogo de soma c. Assim, em um jogo de soma constante c, a recompensa $u_A(s)$ que um jogador A recebe é sempre a diferença $c - u_B(s)$ entre c e a recompensa do outro jogador.

Em um jogo não-cooperativo, os jogadores escolhem suas estratégias apenas de acordo com a percepção de seus próprios interesses, enquanto que em um jogo cooperativo existem regras explícitas que servem, em parte, para representar acordos de cooperação.

Jogo não-cooperativo não significa que os jogadores não cooperem nunca. Eles são motivados apenas pela percepção que têm de seus próprios interesses, mas em certas situações podem exibir um comportamento de cooperação. Os jogadores podem, também, escolher estratégias que beneficiem a todos, ou a alguns, sem ter intenção de atingir esse objetivo.

Portanto, o termo não-cooperativo é um tanto enganoso, mas é um termo consolidado na literatura de Teoria dos Jogos.

Nesse ponto, temos a oportunidade de fazer a importante observação de que nada na Natureza é um jogo estratégico tal qual representamos em nossos modelos matemáticos. Portanto, a economia real não é um jogo estratégico, muito menos de soma zero e nem, tampouco, um jogo de soma qualquer. Entretanto, a economia real pode ser "pensada" e, assim, se tornar Economia como um esquema de modelos matemáticos.

Os modelos da Economia, por sua vez, podem ser "pensados" como jogos não–cooperativos de soma positiva, mas até mesmo explicar o significado exato dessa afirmação é uma tarefa ambiciosa. Não obstante, a abstração Economia aliada às abstrações Matemática, Teoria da Computação, Programação Genética e Teoria da Evolução, forma um rigoroso esquema de análise que "compreende", "estimula" e "manipula" a economia real e a riqueza produzida por ela e, além disso, desmascara equívocos e ilusões sobre as mesmas. É um erro grave subestimar a capacidade de esquemas abstratos e puramente teóricos de desmascarar crenças falsas acerca da natureza, da economia e da sociedade. Aparentemente, países que não acreditaram nesse poder abstrato recolheram, da economia real, muito menos riqueza do que aqueles que o vêm cultivando e aplicando à realidade desde David Ricardo e Adam Smith. O tema da adequação da teoria econômica à economia real é fascinante, mas complexo e está fora do escopo do estudo que fazemos aqui. Contudo, não podemos deixar de remeter o leitor a dois livros instigantes sobre a origem da riqueza e da natureza da economia real, provavelmente duas referências fundamentais no momento sobre esse tema: o livro do professor Eric Beinhocker (BEINHOCKER, 2006) da Escola de Negócios da Universidade de Harvard e o livro do jornalista David Warsh (WARSH, 2006).

Prosseguindo com nosso jogo elementar de dois jogadores, podemos então renovar a pergunta mais famosa da história dos jogos estratégicos: sob que condições existe uma estratégia conjunta de equilíbrio?

Em outras palavras, será que, sob alguma condição razoável, existe uma estratégia conjunta $s^* = (s_A^*, s_B^*)$ tal que qualquer mudança unilateral de estratégia, de qualquer um dos jogadores $i \in I = \{1, 2\}$, não melhoraria a sua recompensa u_i?

É importante esclarecermos o quantificador "para qualquer um", isto é, temos que verificar, ou imaginar, cada jogador mudando, isoladamente, apenas o seu lance ficando inalterável o lance do oponente.

Matematicamente, é fácil representar essa situação. Queremos saber se existe um par de estratégias $s^* = (s_A^*, s_B^*)$ tal que $u_A(s_A^*, s_B^*) \geq u_A(s_A, s_B^*)$ e $u_B(s_A^*, s_B^*) \geq u_B(s_A^*, s_B)$, quaisquer que sejam s_A e s_B escolhidas por A e B, respectivamente. Em outras palavras, se o jogador A mudar sua estratégia, digamos, trocar s_A^* por s_A, então a nova recompensa $u_A(s_A, s_B^*)$ não é melhor, nunca é mais do que a recompensa $u_A(s_A^*, s_B^*)$ recebida antes.

Da mesma forma, se B trocar sua estratégia, digamos, trocar s_B^* por s_B, então ele recebe $u_B(s_A^*, s_B)$ que não melhora a recompensa anterior $u_B(s_A^*, s_B^*)$.

A estratégia conjunta $s^* = (s_A^*, s_B^*)$ que responde a questão formulada acima é chamada "ponto de equilíbrio de Nash".

É importante ressaltarmos o fato de que não estamos exigindo que $u_A(s_A^*, s_B^*) \geq u_A(s_A, s_B)$ para qualquer estratégia conjunta (s_A, s_B). Se isso acontecer, a estratégia (s_A^*, s_B^*) será, obviamente, um caso particular de ponto de equilíbrio de Nash. Será um ponto de recompensa máxima para ambos os jogadores.

Podem existir também vários pontos de equilíbrio onde a recompensa é máxima para ambos os jogadores. Porém, o jogo pode ter vários pontos de equilíbrio de Nash que são bons no sentido da definição de Nash, mas não são os melhores do jogo para ambos os jogadores no sentido de que $u_A(s_A^*, s_B^*) \geq u_A(s_A, s_B)$ para qualquer estratégia conjunta (s_A, s_B).

A famosa pergunta é não trivial e foi formulada e respondida matematicamente, aliás de modo genial, para uma classe ampla de jogos, em uma Tese de Doutorado brilhante de nove páginas em 1950 e publicada em 1951 por John F. Nash, matemático americano (1928 –). Nash recebeu o Prêmio Nobel de Economia de 1994, juntamente com Harsanyi e Selten, por seu notável trabalho em Teoria dos Jogos que revolucionou o trabalho de von Neumann-Morgenstern sobre jogos de soma constante. Nash explorou o caso de soma não-constante e, utilizando teoremas de Análise Funcional (teorema do ponto fixo de Brouwer e teorema do ponto fixo de Kakutani, este à época recentemente descoberto), demonstrou a existência de um ponto de equilíbrio "dando visibilidade à mão invisível" de Adam Smith agora modificada. No filme "Uma Mente Brilhante", o diretor colocou uma cena inesquecível em que o orientador acadêmico de Nash em Princeton, ao ler seus cálculos em um punhado de folhas de papel, lhe pergunta: "Você tem consciência de que está derrubando 150 anos de teoria econômica?". E o jovem Nash (com cerca de vinte e dois anos) responde secamente: "Sim!". O equilíbrio de Nash é uma teoria que tenta explicar a dinâmica da luta entre competidores. Estrategistas de várias áreas de atividades humanas utilizaram sua teoria intensamente, pelo mundo todo, durante os anos de 1951 e 1994. Daí o reconhecimento recebido por meio do Nobel de Economia de 1994. Entretanto, seus trabalhos mais profundos, e de compreensão extremamente difícil, foram em Geometria e Topologia Diferencial.

Nash revolucionou o trabalho de von Neumann–Morgenstern ao generalizar a análise matemática para jogos não–cooperativos aproximando mais a Teoria dos Jogos da Economia.

A partir de Nash, compreendemos que os agentes econômicos fazem, sem dúvida, escolhas que lhes interessam individualmente, mas levam em conta as escolhas que os outros podem fazer e as escolhas condicionam-se mutuamente.

Portanto, a questão não é saber se os interesses individuais são todos acomodados pela "mão invisível do mercado", formando a melhor sociedade possível, mas sim, como é possível uma acomodação generalizada de interesses sabendo que qualquer escolha ou decisão depende de todas as outras escolhas ou decisões, antes de saber se a sociedade ótima pode ser alcançada.

Nash respondeu essa questão com a demonstração de que ao menos um ponto de acomodação como esse existe em sistemas de competidores abstratos análogos aos sistemas econômicos. Esse ponto de equilíbrio de Nash não precisa ser um ponto que faz da sociedade a melhor possível.

Muitos jogos sugerem o equívoco da crença na sociedade ótima resultante da satisfação individualista.

O jogo Dilema dos Prisioneiros, por exemplo, é um deles.

	Confessa	Não confessa
Confessa	−2, −2	0, −5
Não confessa	−5, 0	0, 0

Se os dois prisioneiros utilizam a estratégia de confessar, então eles recorrem à estratégia dominante de cada um que é a de melhor recompensa independentemente da estratégia do outro prisioneiro. A estratégia conjunta (*Confessa*, *Confessa*) é recompensada com dois anos de prisão. O perigo de não confessar é cinco anos de prisão se o outro confessar. Porém, a melhor "sociedade" é aquela em que a recompensa dos dois é zero anos de prisão correspondente ao equilíbrio de Nash (*Não confessa*, *Não confessa*).

3. METODOLOGIA

Utilizamos a Matemática como organizadora de representações, o que não é pouco.

Em Ciência, e principalmente na própria Matemática, é sobejamente conhecido o fato de que uma linguagem precisa e rigorosa, com representação igualmente precisa e rigorosa, facilita enormemente a solução de problemas difíceis e, muitas vezes, já é quase que a própria solução.

Não podemos, de maneira alguma, subestimar a importância da representação simbólica e de uma linguagem rigorosa e precisa na abordagem de problemas em geral, científicos ou não.

Daí vem o nosso esforço em explicar e difundir a aplicação da Teoria dos Jogos, todavia, de um modo tão simples quanto possível.

Von Neumann e Morgenstern observaram que um jogo matemático deve conter elementos que representem situações do tipo "se você cortar o preço de sua mercadoria hoje, eu cortarei o preço da minha amanhã".

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Veremos, em seguida, que um jogo também pode conter elementos que simulam uma situação um tanto surpreendente em que "se você cortar seu preço hoje, eu aumentarei o meu amanhã".

Como exemplo, estudaremos um modelo simples de Cournot. As empresas A e B fabricam produtos homogêneos e, portanto, disputam o mesmo conjunto de consumidores. Como os dois produtos são homogêneos, os consumidores não distinguem a qualidade e tomam a decisão de comprar baseada apenas no preço. As empresas A e B, por sua vez, procuram maximizar seus lucros. As estratégias q_1 e q_2 de A e B, respectivamente, variam em um intervalo de números reais, assim como suas recompensas R_A e R_B dadas pelas receitas abaixo, advindo daí a denominação jogo contínuo.

Vamos supor, para simplificar nossa análise, que o preço p para esse produto comum na quantidade q seja dada pela função $p(q) = M - a(q_1 + q_2)$, onde M é um preço máximo que, se atingido, produziria a demanda nula, $q = q_1 + q_2$ é a soma das quantidades produzidas por A e B, respectivamente, e a é uma constante que pode ser interpretada como o preço marginal do produto:

$$\partial p / \partial q_1 = - a = \partial p / \partial q_2.$$

As derivadas parciais acima podem ser interpretadas como

$$- a = \partial p / \partial q_1 \approx [p(q_1 + \Delta q_1) - p(q_1)] / \Delta q_1 = [p(q_1 + 1) - p(q_1)] / 1 =$$

$$= -[p(q_1) - p(q_1 + 1)] = -\text{ preço da } (q_1 + 1)^{\text{a}} \text{ unidade de mercadoria,}$$

pois $p(q_1 + \Delta q_1) - p(q_1) < 0$.

Analogamente, podemos escrever $\partial p / \partial q_2 \approx$ preço da $(q_2 + 1)^{\text{a}}$ unidade de mercadoria que é a definição de preço marginal da mercadoria da empresa B.

As receitas de A e B são dadas, portanto, pelas fórmulas:

$$R_A = p(q)\, q_1 = M\, q_1 - a\, q_1\, q_2 - a\, q_1^2,$$

$$R_B = p(q)\, q_2 = M\, q_2 - a\, q_1\, q_2 - a\, q_2^2,$$

respectivamente.

Suponhamos que os custos de A e B sejam dados por:

$$C_A = b\, q_1,\ C_B = b\, q_2,$$

isto é, os custos são proporcionais às produções q_1 e q_2, e a constante de proporcionalidade $b > 0$ pode ser interpretada como sendo o custo (suposto o mesmo para os dois produtos para simplificar as contas) marginal do produto:

$$\partial\, C_A / \partial q_1 = b = \partial\, C_B / \partial q_2.$$

Logo, os lucros serão dados por:

$$L_A = R_A - C_A = M\, q_1 - a\, q_1\, q_2 - a\, q_1^2 - b\, q_1,$$

$$L_B = R_B - C_B = M\, q_2 - a\, q_1\, q_2 - a\, q_2^2 - b\, q_2,$$

respectivamente.

Os lucros marginais são dados por:

$$\partial L_A / \partial\, q_1 = M - 2\, a\, q_1 - a\, q_2 - b,$$

$$\partial L_B / \partial\, q_2 = M - 2\, a\, q_2 - a\, q_1 - b,$$

respectivamente. Os lucros serão máximos quando (uma vez que $\partial^{\,2} L_A / \partial\, q_1^2 = -2\, a = \partial^{\,2} L_B / \partial\, q_2^2 < 0$ garante a segunda condição para máximos)

$$\partial L_A / \partial\, q_1 = M - 2\, a\, q_1 - a\, q_2 - b = 0,$$

$$\partial L_B / \partial\, q_2 = M - 2\, a\, q_2 - a\, q_1 - b = 0,$$

de cujo sistema concluímos que

$$q_1 = (M - a\, q_2 - b) / 2a,$$

$$q_2 = (M - a\, q_1 - b) / 2a.$$

Portanto, se A produz q_1^* unidades, então B responde com

$$q_2^* = (M - a\, q_1^* - b) / 2a.$$

Da mesma forma, se B produz q_2^* unidades, então A responde com

$$q_1^* = (M - a\, q_2^* - b) / 2a.$$

Dizemos, então, que q_2^* é a quantidade que A supõe que a concorrente B irá produzir e q_1^* é a quantidade que B supõe que a concorrente A irá produzir. Porém, as empresas não sabem qual é a quantidade exata que sua concorrente está produzindo. Como resolver esse problema? Se elas tomarem uma decisão racional, então deverão produzir as quantidades q_1^* e q_2^* que, portanto, deverão ser

$$q_1^* = (M - b) / 3a = q_2^*.$$

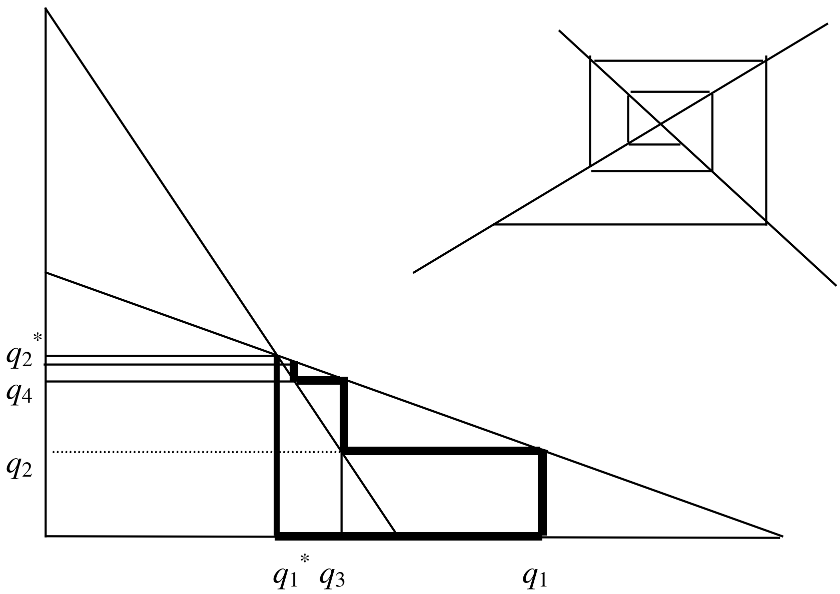
No gráfico abaixo, o leitor pode observar que se A aumentar o preço, digamos, adotando $q_1 > q_1^*$, então B sabe exatamente como responder pelo gráfico diminuindo seu preço para $q_2 < q_2^*$, o que, por sua vez, obrigaria A a diminuir para q_3 com $q_1 > q_3 > q_1^*$, provocando a resposta $q_2 < q_4 < q_2^*$ de B aumentando seu preço para q_4.

As duas empresas, então, produziriam duas seqüências de preços:

$$q_1 > q_3 > q_5 > \ldots > q_{2n+1} > \ldots > q_1^*,$$

$$q_2 < q_4 < q_6 < \ldots < q_{2n} < \ldots < q_2^*.$$

Para certas constantes a, b e M, podemos demonstrar que a seqüência q_{2n+1} produzida por A converge para q_1^* e que a seqüência q_{2n} produzida por B converge para q_2^*. Sendo assim, não há incentivo para que qualquer uma das empresas aumente ou diminua seu preço porque o concorrente sabe exatamente como reagir e as reações de ambas levam as quantidades de volta aos valores de equilíbrio q_1^* e q_2^*. Esse ponto de equilíbrio (q_1^*, q_2^*) é chamado de equilíbrio de Cournot-Nash. A trajetória formada no processo de convergência é chamada <u>teia de Cob</u> ou <u>Cobweb</u> (nesse ponto, há uma variante de estudo interessante que é saber o que ocorre, em geral, matematicamente se a, b e M variam



livremente. Essa curiosidade conduz à Teoria do Caos que foge de nosso escopo) porque em situações mais gerais ela se parece com a figura acima à direita.

As empresas poderiam aumentar seus lucros formando um <u>cartel</u>. Nesse caso, produziriam $q = q_1 + q_2$ obtendo uma receita $R(q) = p(q)\, q$ com um custo $C(q) = b\, q$. O lucro do cartel seria dado por

$$L = R - C = (M - a\, q)\, q - b\, q = -\, a\, q^2 + (M - b)q.$$

O lucro máximo ocorreria quando (uma vez que $d^{\,2}L\,/\,d\,q^2 = -\,2\,a < 0$ garante a segunda condição para máximos)

$$dL\,/\,dq = -\,2\,a\,q + M - b = 0,$$

ou seja, quando $q = (M - b)\,/\,2a$, que é maior do que $q_1^* = (M - b)\,/\,3a = q_2^*$.

Isso mostra que o cartel poderia lucrar mais, mostrando que o equilíbrio de Cournot-Nash não é <u>Pareto eficiente</u>.

Os cartéis poderiam ser proibidos, ou ainda, as condições para a sua formação poderiam não ser fáceis de serem cumpridas, ou ainda, as empresas poderiam descobrir que o desrespeito ao cartel seria mais lucrativo.

Portanto, admitiremos que as empresas A e B comportam-se como concorrentes. Interessa-nos, agora, analisar o que poderia acontecer se A estivesse no mercado e B tivesse a possibilidade de entrar ou não no mesmo mercado oferecendo um produto homogêneo ao produto de A.

4.1 Empresas *A* e *B* e um jogo *AB* discreto com revelação da identidade

Estudemos, agora, dois jogos discretos, ou seja, dois jogos onde as recompensas u não variam em um intervalo de números reais, representando duas empresas concorrentes A e B (adaptado de FUDENBERG (2000)), que denominaremos jogos AB. A empresa A tem duas estratégias:

$S_A = \{Constrói\ uma\ nova\ fábrica,\ Não\ Constrói\ uma\ nova\ fábrica\} = \{C, NC\}$, enquanto que a empresa B, sua possível concorrente, decide se entra, ou não, no mercado:

$$S_B = \{Entra\ no\ mercado,\ Não\ Entra\ no\ mercado\} = \{E, NE\}.$$

O jogo AB, em que o custo de A para construir uma nova fábrica é alto, é indicado por G_1, e o outro, em que o custo é baixo, é indicado por G_2. Os conjuntos de jogadores são $I_1 = \{A_1, B_1\}$ e $I_2 = \{A_2, B_2\}$, onde, particularmente nesse exemplo, $B_1 = B_2 = B$. Portanto, $i_1 = A_1$ (A de custo alto) ou $i_1 = B_1 = B$ no jogo 1, e $i_2 = A_2$ (A de custo baixo) ou $i_2 = B_2 = B$ no jogo 2.

Esses dois jogos AB podem ser representados, na sua forma normal, por duas matrizes 2×2 de recompensa de A_1 e B_1 no jogo 1 e de A_2 e B_2 no jogo 2:

Custo alto (G_1)	Entra (E)	Não entra (NE)	Custo baixo (G_2)	Entra (E)	Não entra (NE)
Constrói (C)	2, –1	2, 0	Constrói (C)	4, –1	6, 0
Não constrói (NC)	2, 1	3, 0	Não constrói (NC)	3, 1	4, 0

Representemos os conjuntos discretos de estratégias das empresas A_1 e A_2 por $S_{A1} = \{C, NC\}$, $S_{A2} = \{C, NC\}$, e o conjunto discreto de estratégias das empresas $B_1 = B_2$ por $S_{B1} = S_{B2} = \{E, NE\}$, onde $s_{A1} = C$ ou NC, $s_{A2} = C$ ou NC, $s_{B1} = E$ ou NE, $s_{B2} = E$ ou NE. Assim, temos os conjuntos discretos de estratégias conjuntas:

$$S_1 = S_{A1} \times S_{B1} = \{(s_{A1}, s_{B1}): s_{A1} = C \text{ ou } NC,\ s_{B1} = E \text{ ou } NE\},$$

para o jogo 1, e

$$S_2 = S_{A2} \times S_{B2} = \{(s_{A2}, s_{B2}): s_{A2} = C \text{ ou } NC,\ s_{B2} = E \text{ ou } NE\},$$

para o jogo 2.

Nesse exemplo com dois jogos G_1 e G_2, temos $S_1 = S_2 = \{(C, E), (C, NE), (NC, E), (NC, NE)\}$, ou seja, os dois conjuntos de estratégias conjuntas coincidem.

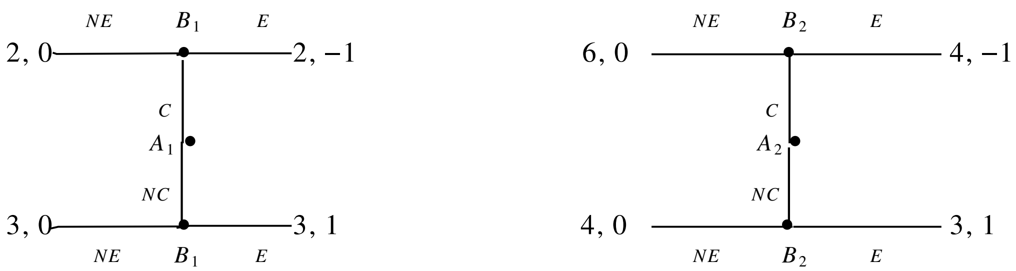
Para cada jogador i_1, a função utilidade u_{i1} que lhe dá a recompensa pelas estratégias conjuntas é $u_{A1}: S_{A1} \times S_{B1} \to \mathbb{R}$, onde $u_{A1}(C, E) = 2$, $u_{A1}(C, NE) = 2$, $u_{A1}(NC, E) = 2$, $u_{A1}(NC, NE) = 3$, e $u_{B1}: S_{A1} \times S_{B1} \to \mathbb{R}$., onde $u_{B1}(C, E) = -1$, $u_{B1}(C, NE) = 0$, $u_{B1}(NC, E) = 1$, $u_{B1}(NC, NE) = 0$ no caso Custo alto, e $u_{A2}: S_{A2} \times S_{B2} \to \mathbb{R}$, onde $u_{A2}(C, E) = 4$, $u_{A2}(C, NE) = 6$,

$u_{A2}(NC, E) = 3$, $u_{A2}(NC, NE) = 4$, e u_{B2}: $S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}$, onde $u_{B2}(C, E) = -1$, $u_{B2}(C, NE) = 0$, $u_{B2}(NC, E) = 1$, $u_{B2}(NC, NE) = 0$ no caso Custo Baixo.

As recompensas u_{B1} de B_1 e u_{B2} de B_2 dependem se A_1 e A_2, respectivamente, constroem ou não, mas não são influenciados pelo custo de A_1 e A_2, respectivamente, como podemos observar facilmente pelas duas matrizes de recompensa. Ainda podemos ver que a estratégia "Entra" é lucrativa para B_1 e B_2 se, e somente se, A_1 e A_2 escolhem, respectivamente, a estratégia "Não Constrói". As matrizes de recompensas também nos mostram que A_1 e A_2 têm uma estratégia dominante. Ou seja, elas "Constroem" se seu custo é "baixo" e "Não constroem" se seu custo é "alto", independentemente da estratégia adotada por B_1 e B_2, respectivamente.

Custo alto (G_1)	E	NE	Custo baixo (G_2)	E	NE
C	2, –1	2, 0	C	4, –1	6, 0
NC	3, 1	3, 0	NC	3, 1	4, 0

Representemos, agora, os jogos AB na forma extensiva. Essa representação nada mais é do que um diagrama de árvore contendo pontos como jogadores e ramos como estratégias escolhidas. O primeiro movimento é de A_1 e A_2 que escolhem C ou NC e, em seguida, B_1 e B_2 fazem o movimento E ou NE.



Custo alto Custo baixo

A empresa A_1 tem uma estratégia dominante, isto é, se A_1 não constrói, ou seja, se A_1 assume a estratégia NC, então ela recebe a melhor recompensa (3 e 3) independentemente da decisão estratégica de B_1. Quando o jogo é o de Custo baixo, se A_2 assume a estratégia C, então ela recebe a melhor recompensa (4 e 6) independentemente se B_2 entra ou não no mercado e, portanto, C é dominante para A_2.

Podemos interpretar as recompensas de A_1, A_2, B_1 e B_2 da seguinte forma. Por exemplo, se o jogo é o de Custo alto, então (C, E) faz com que a ação da empresa A_1 na bolsa de valores se valorize duas unidades monetárias (u.m.), enquanto que a ação da empresa B_1 se desvaloriza em uma u.m.. O movimento (C, NE) faz com que a ação da empresa A_1 na bolsa de valores se valorize 2 u. m., enquanto que a ação da empresa B_1 não se valoriza nem se desvaloriza. Se o jogo é o de Custo baixo, então (C, E) faz com que a ação da empresa A_2 na bolsa de valores se valorize 4 u. m., enquanto que a ação da empresa B_2 se desvaloriza em uma unidade monetária. O movimento (C, NE) faz com que a ação da empresa A_2 na bolsa de valores se valorize 6 u. m., enquanto que a ação da empresa B_2 não se valoriza nem se desvaloriza.

4.2 Um jogo *AB* discreto sem revelação da identidade

Uma pergunta que nos interessa é a seguinte: o que poderia acontecer se a empresa A não praticasse a divulgação voluntária? A empresa A poderia sinalizar ao mercado que tem potencial de crescimento planejando a construção de uma nova fábrica. Qualquer informação sobre sua identidade pode beneficiar a empresa *B* que pode entrar no mercado fazendo diminuir a demanda para *A* e, conseqüentemente, sua receita podendo reduzir seu lucro.

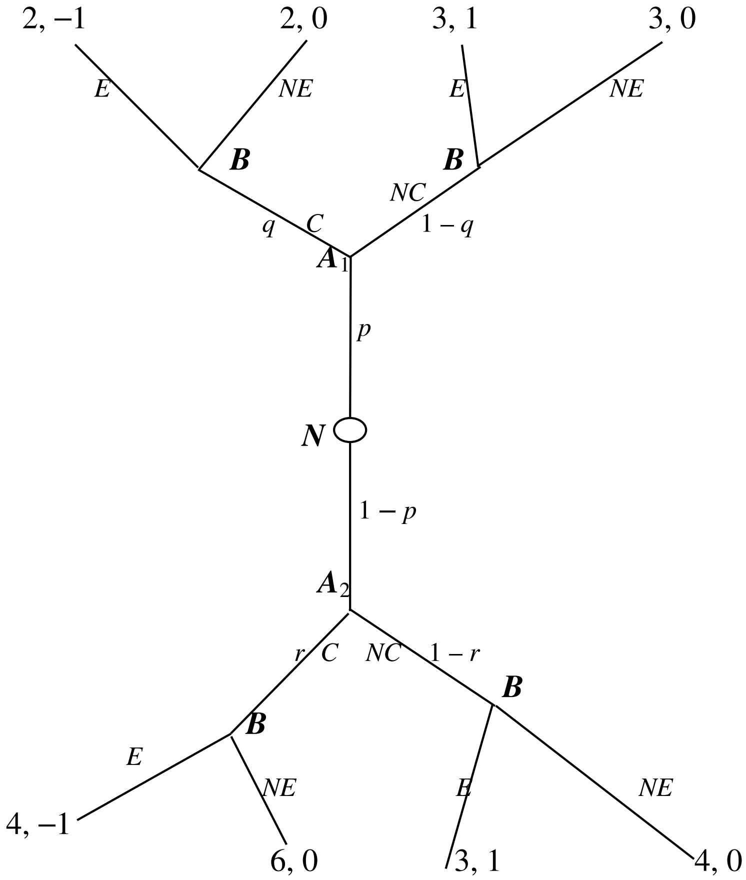
A empresa *B* quer saber qual é o custo de produção de sua concorrente a empresa *A*. A empresa *B* deseja de *A* o máximo de informações contábeis que for possível para tomar a decisão se entra ou não no mercado. Entretanto, *A* deseja superestimar seu custo para *B* a fim de desencorajar a concorrência. A empresa *B* sabe que *A* pode divulgar informações incertas. Como *B* deve proceder diante dessa incerteza? Se ignorar simplesmente as informações divulgadas por *A*, baseada em que deveria entrar ou não no mercado? E se *A* decidir não divulgar nenhuma informação contábil? Se *A* não divulgar suas demonstrações contábeis, então *A* não revela sua identidade à concorrente *B*. Desse modo, *A* introduz uma incerteza sobre sua identidade e, portanto, faz surgir uma <u>informação incompleta</u>. A empresa *A* conhece sua identidade, mas *B* não possui essa informação.

Para estudarmos essa situação, precisamos transformar um jogo de informação incompleta em um <u>jogo de informação imperfeita</u>. Para isso, tomamos os dois jogos da seção anterior e os conectamos em um único jogo. Em nosso exemplo, podemos representar a situação de incerteza sobre *A* por meio de um jogo em sua forma extensiva como abaixo.

Nesse ponto, o jogo fica mais interessante. Vejamos como essa situação matematicamente mais rica é abordada por um economista matemático que dividiu o Prêmio Nobel com Nash em 1994. Harsanyi (economista húngaro (1920–2000), juntamente com Nash e Selten ganharam o Prêmio Nobel de Economia de 1994 justamente por suas idéias revolucionárias no campo da Teoria dos Jogos) introduz um novo jogador *N*, que interpreta como sendo a Natureza e não tem recompensa no jogo, que escolhe o tipo da empresa de *A* com probabilidade *p*. Aqui vamos especificar a idéia de Harsanyi interpretando *p* como a probabilidade, elaborada por um instituto de pesquisa ou por um consultor econômico, de *A* ser do tipo Custo alto.

A empresa *B* não acredita que *A* só constrói uma nova fábrica se é de Custo alto, uma vez que não existem informações contábeis disponíveis de *A*. Assim, *B* acredita que a chance é *q* de a empresa *A* construir se a informação do instituto de pesquisa ou dos consultores for a de que *A* é de Custo alto e *r* se a informação for a de Custo baixo. Admitiremos que *B* entra no mercado se, e somente se, acredita que *A* não constrói uma nova fábrica.

Assim, a empresa *B* pode supor que, na verdade, concorre com duas empresas A_1, A_2, no lugar de *A* para afastar a incerteza sobre sua identidade. *B* joga com dois jogadores substituindo o jogador *A* e sua crença sobre eles. Esse é o custo de oportunidade para lidar com a incerteza dos custos de produção de *A* e de suas decisões. O problema é que sua incerteza se propaga em todas as direções do mercado afetando em maior ou menor grau todos os agentes econômicos.



Harsanyi criou um novo jogador, a Natureza N, que interpretamos como um instituto de pesquisa ou consultores, e fez com que ela entrasse no jogo e escolhesse aleatoriamente as identidades A_1, A_2 da empresa A para competir com B, recuperando a característica normal de um único jogo de estratégias. Entretanto, devido à introdução de uma distribuição de probabilidades para a identidade de um jogador, o jogo será de informação imperfeita.

Definição 5.1 Um jogo de informação imperfeita sobre o jogador A é um conjunto ordenado $H = (A, B, S_A, S_B, U_A, U_B)$, um par (N, S_N), dois jogos de informação completa $G_1 = (A_1, B, S_{A1}, S_B, u_{A1}, u_{1B})$ e $G_2 = (A_2, B, S_{A2}, S_B, u_{A2}, u_{2B})$, onde $S_{A1} = S_A = S_{A2}$, $S_N = \{A_1, A_2\}$, e distribuições de probabilidades sobre S_N, $S_{A1} \times S_B$ e $S_{A2} \times S_B$, tais que, se (a, b) é uma estratégia conjunta de $S_A \times S_B$, então $U_A\,(a, b) = P(A_1, a, b)\, u_{A1}(a, b) + P(A_2, a, b)\, u_{A2}(a, b)$ e $U_B\,(a, b) = P(A_1, a, b)\, u_{1B}\,(a, b) + P(A_2, a, b)\, u_{2B}\,(a, b)$.

Desse modo, a nossa interpretação da Natureza de Harsanyi transforma um jogo de informação incompleta, representado por dois jogos de informação completa G_1 e G_2, em um jogo de informação imperfeita H cujas recompensas U_A e U_B são médias ponderadas de u_{A1}, u_{A2} e u_{1B}, u_{2B}, respectivamente, tendo por pesos distribuições de probabilidades $P(A_1, a, b)$ e $P(A_2, a, b)$ simulando a incerteza de B sobre a identidade de A.

Explicitemos a recompensa de B. Tomemos $s_{A1} = C$ e $s_B = E$. É importante observar que $U_B\,(C, E) = U_B\,(s_{A1} = C, s_B = E)$ é a recompensa de Harsanyi atribuída a B condicionada pela sua crença na probabilidade $q = P(s_{A1} = C \mid A = A_1)$ de A_1 tomar a decisão $s_{A1} = C$, dado que a empresa A é do tipo A_1, e pela sua decisão $s_B = E$ de entrar no mercado.

Harsanyi, então, faz uma média ponderada por probabilidades $P(A_1, a, b)$ e $P(A_2, a, b)$ para a incerteza de B, na forma de Bayes, e lhe atribui a recompensa

$$U_B\,(C, E) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = C \mid s_N = A_1)\,P(s_B = E \mid s_A = C, s_N = A_1)\,u_{1B}\,(C, E) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = C \mid s_N = A_2)\,P(s_B = E \mid s_A = C, s_N = A_2)\,u_{2B}\,(C, E) =$$
$$= p\,q\,(0)\,(-1) + (1-p)\,r\,(0)\,(-1) = 0.$$
$$U_B\,(C, NE) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = C \mid s_N = A_1)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_1)\,u_{1B}\,(C, NE) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = C \mid s_N = A_2)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_2)\,u_{2B}\,(C, NE) =$$
$$= p\,q\,(1)\,(0) + (1-p)\,r\,(1)\,(0) = 0.$$
$$U_B\,(NC, E) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = NC \mid s_N = A_1)\,P(s_B = E \mid s_A = NC, s_N = A_1)\,u_{1B}\,(NC, E) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = NC \mid s_N = A_2)\,P(s_B = E \mid s_A = NC, s_N = A_2)\,u_{2B}\,(NC, E) =$$
$$= p\,(1-q)\,(1)\,(1) + (1-p)\,(1-r)\,(1)\,(1) = p - p\,q + 1 - p - r + pr = -\,p\,q + 1 - r + pr.$$
$$U_B\,(NC, NE) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = NC \mid s_N = A_1)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_1)\,u_{1B}\,(NC, NE) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = NC \mid s_N = A_2)\,P(s_B = NE \mid s_A = NC, s_N = A_2)\,u_{2B}\,(NC, NE) =$$
$$= p\,(1-q)\,(0)\,(0) + (1-p)\,(1-r)\,(0)\,(0) = 0.$$

Explicitemos a recompensa de A.

$$U_A\,(C, E) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = C \mid s_N = A_1)\,P(s_B = E \mid s_A = C, s_N = A_1)\,u_{A1}\,(C, E) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = C \mid s_N = A_2)\,P(s_B = E \mid s_A = C, s_N = A_2)\,u_{A2}\,(C, E) =$$
$$= p\,q\,(0)\,(2) + (1-p)\,r\,(0)\,(4) = 0.$$
$$U_A\,(C, NE) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = C \mid s_N = A_1)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_1)\,u_{A1}\,(C, NE) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = C \mid s_N = A_2)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_2)\,u_{A2}\,(C, NE) =$$
$$= p\,q\,(1)\,(2) + (1-p)\,r\,(1)\,(6) = 2\,pq - 6\,pr + 6\,r.$$
$$U_A\,(NC, E) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = NC \mid s_N = A_1)\,P(s_B = E \mid s_A = NC, s_N = A_1)\,u_{A1}\,(NC, E) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = NC \mid s_N = A_2)\,P(s_B = E \mid s_A = NC, s_N = A_2)\,u_{A2}\,(NC, E).$$
$$= p\,(1-q)\,(1)\,(3) + (1-p)\,(1-r)\,(1)\,(3) = 3\,p - 3\,pq + 3 - 3\,p - 3\,r + 3\,pr =$$
$$= -\,3\,pq + 3 - 3\,p - 3\,r + 3\,pr.$$
$$U_A\,(NC, NE) = P(s_N = A_1)\,P(s_A = C \mid s_N = A_1)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_1)\,u_{A1}\,(C, NE) +$$
$$+\,P(s_N = A_2)\,P(s_A = C \mid s_N = A_2)\,P(s_B = NE \mid s_A = C, s_N = A_2)\,u_{A2}\,(C, NE) =$$
$$= p\,(1-q)\,(0)\,(3) + (1-p)\,(1-r)\,(0)\,(3) = 0.$$

Como $\partial U_A\,(C, NE)\,/\,\partial\,q = 2\,p$, o máximo de $U_A\,(C, NE) = 2\,pq - 6\,pr + 6\,r$ não é atingido enquanto $p \neq 0$, portanto, enquanto houver incerteza sobre a identidade de A. Da mesma forma, $U_A\,(NC, E) = -\,3\,pq + 3 - 3\,p - 3\,r + 3\,pr$ não pode atingir seu máximo enquanto $p \neq 0$. Por outro lado, $-\,3\,pq + 3 - 3\,p - 3\,r + 3\,pr$ é trivialmente menor ou igual a 6 e

$$2\,pq + (1-p)\,6\,r \leq 2\,p + (1-p)\,6 \leq 6 - 4\,p \leq 6.$$

Isto é, a recompensa de A não pode ultrapassar o máximo 6 determinado na situação em que sua identidade é revelada ao mercado.

Examinemos o que acontece na situação de incerteza máxima em que as probabilidades p, q e r são iguais a ½. Temos:

$$U_A\,(C, NE) = 2\,pq - 6\,pr + 6\,r = 2\,(½)\,(½) - 6\,(½)\,(½) + 6\,(½) = (½) - 3/2 + 3 = 1 \quad \text{e}$$
$$U_A\,(NC, E) = -\,3\,pq + 3 - 3\,p - 3\,r + 3\,pr =$$
$$= -\,3\,(½)\,(½) + 3 - 3\,(½) - 3\,(½) + 3\,(½)\,(½) = 3 - 3/2 - 3/2 = 0$$

o que mostra que A pode ter uma severa redução de valor.

A situação pode piorar ainda mais se considerarmos uma incerteza menor como $p = 3/4$, e $q = r = ½$. Temos:

$$U_A\,(NC, E) = -\,3\,pq \;+\; 3\; -3\,p - 3\,r \;+\; 3\,pr \;=$$
$$= -\,3\,(¾)\,(½) + 3 - 3\,(¾) - 3\,(½) + \;3\,(¾)\,(½) \;=$$
$$= \;-\,9/8 \;+\; 3 - 9/4 \;-3/2 \;+\; 9/8 \;=\; -\,¾.$$

Finalmente, examinemos os equilíbrios de Nash.

	E	NE
C	0, 0	$2\,pq - 6\,pr + 6\,r,\;\; 0$
NC	$-\,3\,pq \;+\; 3\; -3\,p - 3\,r \;+\; 3\,pr, -p\,q + 1 - r + pr$	0, 0

A estratégia conjunta (C, NE) é um equilíbrio de Nash, independentemente dos valores de p, q e r, porque

$$2\,pq - 6\,pr + 6\,r = 2\,pq + 6\,r\,(1 - p) \;>\; 0$$

ou seja, não há como melhorar esse par de recompensas à esquerda ou abaixo na matriz 2×2 acima e, ainda por essa desigualdade, as estratégias conjuntas (C, E) e (NC, NE) não são equilíbrios de Nash.

A estratégia conjunta (NC, E) poderá ser ou não um equilíbrio de Nash. Portanto, concluímos que existe pelo menos um ponto de equilíbrio de Nash independentemente das crenças de B. Isso está de acordo com o Teorema de Nash que afirma que sempre existe pelo menos um ponto de equilíbrio em jogos finitos de estratégias mistas análogos ao nosso jogo AB contendo distribuição de probabilidades.

A estratégia conjunta (NC, E) será um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$-\,3\,pq \;+\; 3\; -3\,p - 3\,r \;+\; 3\,pr \;\geq\; 0,$$
$$-\,p\,q + 1 - r + pr \;\geq\; 0.$$

que equivale a

$$3\,p\,(r - q) \;-\; 3\,p \;+\; 3\,(1 - r) \;\geq\; 0,$$
$$-\,p(q - r) \;+ (1 - r) \;\geq\; 0.$$

que equivale a

$$3\,p\,[(r - q) \;-\; 1] \;+\; 3\,(1 - r) \;\geq\; 0,$$
$$-\,p(q - r) \;+ (1 - r) \;\geq\; 0.$$

que equivale a

$$-\,3\,p\,[1 - (r - q)] \;+\; 3\,(1 - r) \;\geq\; 0,$$
$$-\,p(q - r) \;+ (1 - r) \;\geq\; 0.$$

que equivale a

$$3\,(1 - r) \;\geq\; 3\,p\,[1 - (r - q)],$$
$$(1 - r) \;\geq\; p(q - r)$$

que equivale a

$$1\,/\,p \;\geq\; [1 - (r - q)] \;/\,(1 - r),$$
$$1\,/\,p \;\geq\; (q - r)\,/\,(1 - r),$$

de onde concluímos que

$$1\,/\,p \;\geq\; [1 - (r - q)] \;/\,(1 - r) \Leftrightarrow 1\,/\,p \;\geq\; [1 + q - r]\,/\,(1 - r) = 1 + q\,/\,(1 - r).$$

Por exemplo, na situação de incerteza máxima com p, q e r iguais a ½, temos:

$$1\,/\,p \;= 2 \geq\; 1 + ½\,/\,(1 - ½)$$

de onde concluímos que (NC, E) é um equilíbrio de Nash.

Na situação de incerteza com $p = 3/4$, e $q = r = ½$, temos:

$$1\,/\,p \;= 4/3 <\; 1 + ½\,/\,(1 - ½)$$

de onde concluímos que (NC, E) não é um equilíbrio de Nash.

4. CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E NOVAS DIREÇÕES DA PESQUISA

Com o objetivo de explicar e difundir a aplicação da Teoria dos Jogos na Contabilidade, abordamos um pouco da história e, de um modo elementar, alguns tópicos dessa teoria.

Examinamos, por meio de uma analogia com um jogo, como a não divulgação voluntária das demonstrações contábeis pode ser conectada pela teoria ao valor atribuído ao seu ativo pelo mercado.

Um modelo Bayesiano simplificado sugere que esse valor se tornaria instável e poderia variar abaixo do máximo determinado pela visibilidade da identidade da empresa no mercado.

No caso de incerteza máxima da identidade, o valor poderia sofrer uma severa redução e piorar mais até mesmo, paradoxalmente para o senso comum, em situações de incerteza menor.

Uma limitação evidente do trabalho é a ausência de uma simulação ampla dos *pay off´s* com a análise correspondente da variação e da interpretação do modelo, sendo esta a direção clara para a continuidade desta pesquisa.

Do ponto de vista do objetivo maior deste trabalho, espera-se que se constitua em um incentivo eficaz para novas aplicações da Teoria dos Jogos em Contabilidade.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEINHOCKER, E. D., **The origin of wealth: evolution, complexity and the radical remaking of Economics**, Harvard, 2006.

BERTRAND, J. *Théorie mathématique de la richesse sociale*. Journal des Savants 499–508, 1883.

COURNOT, A. *Recherches sur les Principles Matematiques de la Theorie des Richesses* (1838). English edition (ed. N. Bacon): **Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth**. Macmillan, 1897.

EDGEWORTH, F. *La Teoria pura del monopolio*. Giornale degli Economista, 13–31 (1897).

FIANI, R., **Teoria dos Jogos.** Elsevier Editora. Rio de Janeiro: 2006.

FUDENBERG, D., TIROLE, J., **Game Theory.** The MIT Press. Cambridge: 2000.

JEHLE, G. A., RENY, P. J., **Advanced Microeconomic Theory.** Addison Wesley, Second Edition. New York: 2001.

GIGLER, F., *Self-Enforcing Voluntary Disclosure*, Journal of Accounting Research, pp. 261-79.

KORN, E., SCHILLER, U., *Voluntary Disclosure of Nonproprietary Information: A Complete Equilibrium Characterization*, Journal of Business Finance & Accounting, 30(9) & (10) Nov./Dec., 2003, pp. 1327-1339.

NASH, J. F. *Equilibrium points in N-person games*. Proceedings of the National Academy of Sciences: 48-49 (1950).

NASH, J. F. *Non-cooperative games*, Ann. Math. (2), 54, 286-295 (1951).

OHLSON, J. A., *Earnings, book values, and dividends in equity valuation*, Contemporary Accounting Research; Spring 1995; 11, 2; ABI/INFORM Global pg. 661.

WARSH, D., **Knowledge and the Wealth of Nations: a story of economic discovery.** W. W. Norton & Company. New York: 2006.